۱

اصول موضوعهٔ مجموعه ها و اصل تقارن فریلینگ

شاهپور نصرتی
shahpournosrati@yahoo.com
دیماه ۱۳۹۱

چکیده:
این نوشتار مروری است کوتاه در نظریهٔ مجموعه ها که طی آن تاریخچه‌ای مختصر از این نظریه و اصول مطروحهٔ آن را بیان می کند. محور اصلی مقاله بحثی در اصل پیوستار است و اهمیت این اصل از آن جهت است که بسیاری از موضوعات ریاضی بر پایه این اصل قرار گرفته و لذا پذیرش یا رد این اصل نهایتاً منجر به تغییرات زیادی در ریاضی خواهد بود. در نهایت نیز دیدگاه فریلینگ درباره اصل تقارن بیان می شود و اثبات این اصل نقض اصل پیوستار خواهد بود.

کلید واژگان: اصول نظریهٔ مجموعه ها، اصل پیوستار، اصل تقارن فریلینگ.

۱ – مقدمه:

نظریهٔ مجموعه ها در ارتباط با شاخهٔ منطق ریاضی و علم بی نهایت اعداد است که خواص مجرد اشیای ریاضی را بررسی می کند. همچنان که اساس و پایه ریاضی نظریهٔ مجموعه هاست، فرمولبندی این اصول نیز به عهدهٔ این علم است. نسخه های مختلفی از نظریهٔ مجموعه ها هست که هرکدام روی قواعد و اصول خاصی اند. در ترتیب افزایش ارتباط، چند نسخه از نظریهٔ مجموعه ها شامل حساب پئانو[۱]، نظریهٔ مجموعهٔ تسرملو–فرانکل[۲]، فشردهٔ ضعیف، اندازه پذیری و غیره هست که تا حدودی با هم مرتبطند. از آنجاکه زمینهٔ تاریخی بسیاری از مسائل در ریاضیات بسیار حائز اهمیت است، در ادامه بحث تاریخی شکل گیری نظریه مجموعه ها عنوان شده و نظریهٔ مجموعهٔ تسرملو–فرانکل را که از اهمیت بیشتری برخوردار است بیان خواهیم نمود. در تاریخ ریاضی نظریهٔ مجموعه ها در ۱۸۷۳ و زمانی آغاز شد که کانتور ثابت کرد که مجموعه اعداد حقیقی ناشماراست.

۲ – ایدهٔ مجموعه های نامتناهی:

نظریهٔ مجموعه ها حاصل کار و ایجاد ژرژ کانتور[۳] است. قبل از وی در ۱۸۴۷ بولتزانو[۴] ایدهٔ مجموعهٔ نامتناهی را بعنوان مجموعه هائی که اجزائشان به اندازهٔ کل آنهاست بیان نموده بود. در این

[۱] *Peano Arithmatic*

[۲] در این نمادگذاری $\Longrightarrow$ نتیجه می دهد، $\cup$ اجتماع، $\cap$ اشتراک، $\wedge$ و منطقی، $\vee$ یا منطقی، ϕ تهی، ϵ عضویت، $\Rightarrow$ نتیجه می دهد، $\neg$ نقیض، $\exists$ وجود دارد (صور وجودی)، $\forall$ برای هر (صور عمومی)، $\equiv$ هم ارز است با. نماد عضویت ϵ قبلاً توسط پئانو معرفی شده بود که از حرف ابتدائی کلمهٔ یونانی is است.

[۳] *Georg Cantor*

[۴] *Bernhard Bolzano*

زمان عقیده بر این بود که مجموعه های بینهایت وجود ندارند و بولتزانو بشدت از عقیده خود دفاع می کرد. بولتزانو حتی با ارائهٔ مثالهائی نشان داد که اینگونه مجموعه های نامتناهی، اعضائشان در تناظر یک به یک با یکی از زیر مجموعهٔ سرهٔشان هستند که این خصوصیت در مجموعه های متناهی وجود ندارد. مثلاً مجموعهٔ اعداد مربع $\{۱, ۴, ۹, ۱۶, \cdots\}$ که در تقابل با مجموعه اعداد صحیح است. لازم به ذکر است که بولتزانو خود واضع کلمهٔ مجموعه[۵] بوده است.

۳– کانتور و ایده های متعالی:

ایدهٔ اصلی در نظریه مجموعه‌ها توسط کانتور پی ریزی شد و آثار اولیه کانتور در این زمینه دو مقاله بودند که در سال های ۱۸۶۷ و ۱۸۷۱ در مبحث نظریهٔ اعداد به چاپ رسیدند. در ۱۸۷۲ کانتور با ریچارد ددکیند[۶] در سوئیس دیدار می کند و این رفاقت آنها سالهای بعد نیز ادامه می یابد. بین این دو نفر نامه های بسیاری میان سال های ۱۸۷۳–۱۸۷۹ رد و بدل شده است که از این موضوع می توان تاثیر عمیق افکار ددکیند را بر کارهای کانتور نتیجه گرفت. هرچند کانتور تا حدودی نظریه اعداد را کنار گذاشت و به سریهای مثلثاتی روی آورد، ولی کاملاً از موضوع کناره نگرفت و این مقالات در واقع شامل اولین ایده‌های نظریه مجموعه ها و منجمله در بحث اعداد گنگ بود. ددکیند مستقلاً در اعداد گنگ کارهایی انجام داده بود و اثری از وی نیز با نام «اعداد گنگ و پیوسته» به چاپ رسیده بود.

در ۱۸۷۳ کانتور مقاله‌ای را در مجلهٔ کرل[۷] چاپ کرد که تولد نظریه مجموعه‌ها بشمار می رود. متعاقب آن در ۱۸۷۸ نیز مقاله به این ژورنال ارسال نمود که با این دو مقاله نظریه مجموعه‌ها بشکلی بحث برانگیز مطرح گردید. کرونکر[۸] که در هیات تحریریه مجله کار می کرد از ایده های کانتور راضی نبود کانتور سعی نمود که از انتشار مقاله‌اش در کرل جلوگیری کند، ولی ددکیند متقاعد شد و وایرشتراس[۹] نیز از چاپ آن حمایت نمود. بالاخره مقاله کانتور به چاپ رسید و وی دیگر مقاله‌ای به این مجله نفرستاد. مقالهٔ ۱۸۷۴ کانتور شامل دو نوع بی نهایت متفاوت بود که قبلاً بدین شکل مطرح نشده بودند و قبل از این همهٔ مجموعه‌های بی نهایت، «هم اندازه» معرفی شده بودند. کانتور مجموعه اعداد جبری را بررسی کرد یعنی اعدادی حقیقی که ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیحند:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + a_{n-۲} x^{n-۲} + \cdots + a_۱ x + a_۰ = ۰$$

که $a_i \in \mathbb{Z}$ است برای هر $۰ \leq i \leq n$. کانتور ثابت کرد که مجموعه اعداد جبری در تناظر یک به یک با اعداد گویاست (بعبارتی هر عدد جبری با یک عدد گویا متناظر است) بدین طریق که در معادله بالا اندیسی بشکل

$$|a_n| + |a_{n-۱}| + |a_{n-۲}| + \cdots + |a_۱| + |a_۰| + n$$

[۵] *Menge(= Set)*
[۶] *Richard Dedekind*
[۷] *Crelle*
[۸] *Leopold Kroneker*
[۹] *Karl Wirestrass*

را معرفی کرد. تنها یک معادله با اندیس دو هست $x = 0$ و چهار معادله از اندیس سه

$$x^2 = 0 \quad , \quad 2x = 0 \quad , \quad x + 1 = 0 \quad , \quad x - 1 = 0$$

که دارای ریشه های ۱ و −۱ و ۰ هستند. برای هر شاخص تنها تعداد متناهی معادله وجود دارد که مقدار متناهی ریشه دارند و می توان آنها را در تناظر یک به یک با اعداد طبیعی قرار داد و اگرچه اندازهٔ آنها مرتباً رشد می کند، ولی نهایتاً ترتیب شاخص بر اساس اعداد طبیعی قرار خواهد گرفت.

کانتور در متنی ٦ قطعه‌ای که از ۱۸۷۹ تا ۱۸۸۴ در مجلهٔ فصلنامهٔ ریاضیات[10] چاپ شد جلوه های دیگری از مجموعه ها را نمایان نمود و این خود شجاعتی را بیان می کند که در برابر عقاید مخالفینی چون کرونکر قرار می گرفت[11]. در این نوشتار بود که وی ادعا کرد که هر مجموعه قابل مرتب شدن است حتی اعداد حقیقی که نقاط گویا و گنگ در هم پیچیده شده اند. این قانون ثابت نشده اکنون تحت عنوان «اصل خوش ترتیبی» بیان می شود.

کانتور سعی کرد اندازهٔ مجموعه ها را تعیین کند و بینهایت ها را از هم تفکیک نماید. وی برای سنجش اندازه مجموعه ها سیستمی وضع کرد و $\aleph$ که حرف اول الفبای عبری است را برای اندازهٔ یک مجموعهٔ نامتناهی (عدد اصلی) برگزید و برای هر مجموعه مانند X نشان داد

$$|X| < |\mathbb{P}(X)|$$

که $|.|$ عدد اصلی[12] و $\mathbb{P}(X)$ مجموعهٔ توانی یعنی مجموعهٔ تمام زیرمجموعه های X است. آنچه از این قاعده نتیجه می شود این است که دنبالهٔ تمام زیرمجموعه‌ها نمی تواند وجود داشته باشد زیرا

$$|X| < |\mathbb{P}(X)| < |\mathbb{P}(\mathbb{P}(X))| < |\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(X)))| < \cdots$$

طبق اصل خوشترتیبی می بایست تمام اعداد اصلی مرتب باشند که آنها را اعداد ترتیبی نامید. کانتور طی مقالاتش اعداد ترتیبی را مورد بحث قرار داد و نشان داد:

برای هر عدد اصلی مانند α مجموعه ای مانند $A_\alpha = \{x|x < \alpha\}$ هست که $|A| = \alpha$.

هرچند در ۱۸۹۷ پارادوکس بورالی—فورتی[13] منتشر شد که اصل خوش ترتیبی را زیر سوال می برد، ولی این نشاندهندهٔ پایان بحث نبود زیرا کانتور هم ایده های نوین را بیان نمود و هم آنها را توسعه داد. در ارج بخشیدن به وی، در ۱۸۹۷ طی اولین کنگرهٔ بین المللی ریاضیدانان که در زوریخ برگزار شد، از کانتور تجلیل و قدردانی بعمل آمد.

۴− اصل پیوستار:

کانتور اولین عدد اصلی مجموعه نامتناهی را با $\aleph_0$ نشان داد بنابراین $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ و عدد اصلی اولین مجموعهٔ ناشمارا را $\aleph$ نامید. وی نشان داد که خط حقیقی (پیوستار[14]) را نمی توان در تناظر

[10] *Mathematische Annalen*

[11] نقل است که وقتی لیندمان در ۱۸۸۲ متعالی بودن π را اثبات نموده بود کرونکر چنین اظهار عقیده کرد که «سودی در این اثبات زیبا نیست. چرا باید مسائل اینچنینی را بیان کنیم درحالیکه اعداد گنگ وجود ندارند!».

[12] خود کانتور تعداد عناصر مجموعه را توان مجموعه *Set Power* نامید که از کارهای اشتینر *Steiner* گرفته شده بود. دو مجموعه را که در تناظر یک به یک بودند را هم توان می نامیدند.

[13] $Borali - Forti$

[14] *Continuum*

یک به یک با اعداد طبیعی قرار داد و اثبات وی از $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$ بروش قطری سازی مشهور است و معتقد بود که عدد اصلی $|\mathbb{R}| = \aleph$ درست پس از $\aleph_0$ قرار می گیرد، بعبارتی $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0} = \aleph$. خود کانتور عقیده داشت که اثباتی از این فرض وجود دارد اما اشتباه می کرد و بالاخره وی نتوانست ثابت کند $\aleph = 2^{\aleph_0}$. این تساوی بعنوان فرض پیوستار[15] پذیرفته شد که بیان می کند:

مجموعه ای با عدد اصلی κ وجود ندارد چنانکه $\aleph_0 < \kappa < \aleph$

اثبات یا نقض فرض پیوستار اولین مسئله از مسائل بیست و سه گانهٔ هیلبرت[16] است که در ۱۹۰۱ در کنگرهٔ ریاضیدانان در پاریس آنها را فهرست نمود و مهمترین مسائل جدالی قرن بیستم نامید. خود هیلبرت از جمله ریاضیدانانی بود که برای اثبات یا رد فرض پیوستار بسیار تلاش نمود.

۵– تعریف اصول مبنائی مجموعه ها:

شاید تا این زمان لزوم تعریف مجموعه ها دیده نمی شود اما تلاش برای تعاریف ریاضی و ایجاد چارچوب قوانین ریاضی مجموعه ها شکل گرفت. در این بین مسائلی مانند وجود پارادوکس راسل[17] (۱۹۰۲) نیز مسئله را کمی پیچیده تر می نمود. کانتور در ۱۸۹۹ این سوال را مطرح کرده بود که عدد اصلی مجموعهٔ تمام مجموعه هاچیست؟ در پاسخ به این مسئله راسل عنوان کرد که مجموعه‌ای را در نظر بگیرید که شامل تمام زیرمجموعه هائی است که بخودشان تعلق ندارند، بزبان ریاضی

$$Y = \{X | X \notin X\}$$

می بینیم که اگر $Y \in Y$ پس $Y \notin Y$ و اگر $Y \notin Y$ در خاصیت صدق می کند و بنابراین $Y \in Y$. یک توصیف از این نظریه این است که بگوئیم «در شهری آرایشگری هست که هر فردی که خودش را اصلاح نکند، اصلاح می کند» پس چه کسی آرایشگر را اصلاح می کند!. تلاش تسرملو در ۱۹۰۸ اولین کوشش موفق برای اصل بندی نظریهٔ مجموعه ها بود و اصول استانداردی که از نظریهٔ مجموعه ها توسط تسرملو[18] و فرانکل[19] در ابتدای قرن بیستم بیان شد، طی سالهای بعد کاملاً حلاجی شده و بشکل امروزی درآمد.

۶– اصول تسرملو–فرانکل:

اصول تسرملو–فرانکل[20] مبنای نظریه مجموعهٔ تسرملو–فرانکل امروزی هستند. ظاهراً در ادبیات این اصول اختلافاتی دیده می شود (مندلسون (۱۹۹۷)، اندرتون (۱۹۷۷)) لیکن کلیات موضوع یکسان بوده و مطابق بندهای زیر است:

($ZF1$) **اصل گسترش**[21]: دو مجموعه با عضوهای یکسان، مساویند.

$$\forall X \forall Y \left[\forall a (a \in X \equiv a \in Y) \Rightarrow X = Y\right]$$

[15] *Continuum Hypothesis*
[16] *David Hilbert*
[17] *Bertrand Russell*
[18] *Ernst Zermelo*
[19] *Abraham Fraenkel*
[20] *Zermelo – Fraenkel Axioms*
[21] *Axiom of Extensionality*

با این نمادگذاری که $X \subset Y$ عبارتست از $a \in X \Rightarrow a \in Y$ این اصل چنین می شود:

$$\forall X \forall Y \big[(X \subset Y \wedge Y \subset X) \Rightarrow X = Y\big]$$

(ZF۲) **اصل زوجی**[۲۲]: یا اصل زوج های نامرتب[۲۳] بیان می کند که برای هر a و b یک مجموعه دقیقاً شامل دو عضو a و b وجود دارد. این مجموعه که ترتیب در آن لحاظ نمی شود را با $\{a,b\}$ نشان می دهیم.

$$\forall a \forall b \exists X \forall x \big[x \in X \equiv (x = a \vee x = b)\big]$$

(ZF۳) **اصل زیرمجموعه**[۲۴]: این اصل توسط تسرملو بیان شده است[۲۵] می گوید که اگر P خاصیتی (در زبان مجموعه ها) باشد، برای هر مجموعهٔ X یک مجموعهٔ $Y = \{u \in X | P(u)\}$ هست که شامل اعضائی از X با خاصیت P می باشد.

$$(\forall P) \forall X \exists Y \big[\forall u (u \in Y \equiv (u \in X \wedge P(u)))\big]$$

(ZF۴) **اصل اجتماع**[۲۶]: اصلی است که گاهی مجموعه جمعی[۲۷] نام می گیرد. برای هر X یک مجموعهٔ $Y = \bigcup X$، که متشکل از تمام اعضای X است وجود دارد.

$$\forall X \exists Y \big[\forall u (u \in Y \equiv \exists v (v \in X \wedge u \in v))\big]$$

به بیانی اگر X یک مجموعه باشد مجموعه‌ای مانند Y شامل هر عنصر از تمام عناصر X وجود دارد. طبق این اصل از اجتماع و اشتراک بین مجموعه ها، مجموعه تشکیل می گردد.

(ZF۵) **اصل مجموعهٔ توانی**[۲۸]: برای هر X یک مجموعهٔ $Y = \mathbb{P}(X)$ شامل تمام زیرمجموعه های X وجود دارد.

$$\forall X \exists Y \big[\forall u (u \in Y \equiv u \subset X)\big]$$

یعنی مجموعهٔ تمام زیرمجموعه های X وجود دارد.

(ZF٦) **اصل نامتناهی**[۲۹]: یا اصل بینهایت بیان می دارد که مجموعهٔ نامتناهی وجود دارد.

$$\exists X \big[\phi \in X \wedge [\forall u \in X : u \cup \{u\} \in X]\big]$$

یعنی مجموعه ای مانند X هست که بازای هر عنصرش مانند x، X شامل x و $\{x\}$ است. این تعریف نشان می دهد مجموعه ای شامل اعداد طبیعی وجود دارد و بر این مبنا فون نویمن[۳۰] ساختار

---

[۲۲] *Axiom of Pairing*

[۲۳] *Axiom of Unordered Pairs*

[۲۴] *Axiom of Subsets*

[۲۵] این اصل را گاهی اصل جداسازی ادراک *Axiom of Schema Seperation* نامند ولی چون با اصل جداسازی هاسدورف هم نام است کاربردی نامتعارف دارد.

[۲۶] *Axiom of Union*

[۲۷] *Axiom of the Sum Set*، (کانتر).

[۲۸] *Axiom of the Power Set*

[۲۹] *Axiom of Infinity*

[۳۰] *John von Neumann*

اعداد طبیعی را چنین بیان می کند:

$$\begin{aligned} ۰ &= \phi \\ ۱ &= \{۰\} \\ ۲ &= \{۰, ۱\} = \Big\{۰, \{۰\}\Big\} \\ ۳ &= \{۰, ۱, ۲\} = \Big\{۰, \{۰\}, \{۰, \{۰\}\}\Big\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

($ZF۷$) **اصل جایگذاری**[۳۱]: اگر f تابعی باشد سپس برای هر X یک مجموعهٔ $Y = f[X] = \{f(u) | u \in X\}$ وجود دارد. به بیان ریاضی

$$\exists X \forall u \in Y \big[\exists z A(y, z) \Rightarrow [\forall u \in X (u \subset \{u\} \in X)]\big]$$

بعبارتی برای فرمول f و مجموعهٔ X، مجموعهٔ Y هست که هر عضوش عضو X بوده و در خاصیت f صدق می کند. این اصل توسط فرانکل بیان گردید و بیان می کند که «خاصیتها، مجموعه ها تعیین می کنند».

($ZF۸$) **اصل نظم**[۳۲]: هر عنصر مجموعه در یک زنجیر قرار می گیرد.

$$\forall X \big[X \neq \phi \Rightarrow [\exists u \in X (u \cap X = \phi)]\big]$$

این اصل را برخی آنرا اصل بنیادی[۳۳] نامیده‌اند و به بیانی می گوید هر مجموعه ناتهی دارای یک عنصر ϵ—می نیمال است. یا اینکه هر مجموعهٔ ناتهی X شامل عنصر x است که (بعنوان یک مجموعه) مستقل از X است و یا هر مجموعهٔ ناتهی از یکی از اعضاء خود مستقل است. هرچند برای این اصل، دو عبارت «حداقل بودن» و «استقلال» بیان می شود ولی مندلسون معادل بودن این دو عبارت را ناشی از اصل انتخاب می داند (جش ۱۹۹۷).

سیستم اصول ($ZF۱ - ZF۸$) را اصول نظریهٔ مجموعه تسرملو—فرانکل گویند و با ZF نشان می دهند و مجموعه اصول ($ZF۱ - ZF۸$) بجز $ZF۷$ را اصول نظریهٔ مجموعه تسرملو گویند و با Z نشان می دهند. تمامی ریاضیات مرسوم را می توان بر اساس قوانین منطق و ZF پایه گذاری کرد. اکثر برهان های ریاضی به اصول موضوعه نظریه مجموعه ها برمی گردند. کسی که از ریاضیات استفاده می کند بایستی این اصول را بطور طبیعی مسلم فرض نماید. باید دانست که تمام عبارات ریاضی را می توان عملاً با گزاره نمای $x \in y$ بیان نمود و فرض اساسی نظریه تسرملو—فرانکل این است که «هر خاصیتی یک مجموعه را تعریف می کند».

۷— اصل انتخاب:

---

[۳۱] *Axiom of Schema Replacement*

[۳۲] *Axiom of Regularity*

[۳۳] *Axiom of Foundation*

این اصلی مهم و اساسی در نظریهٔ مجموعه هاست که در ۱۸۹۰ توسط پئانو مختصراً بکار گرفته شد و در ۱۹۰۲ توسط بپی لوی[۳۴] بیان گردید چنین است:

برای هر مجموعهٔ X تابعی مانند f روی A چنان هست که برای هر عنصر $x \in X$ داریم $f(x) \in X$.

در ۱۹۰۴ تسرملو این اصل را فرمول بندی کرده بیان می کند و از این اصل، اصل خوشترتیبی را نتیجه می گیرد و بدین ترتیب آن را اصل تسرملو[۳۵] نیز نامند. صورت دیگری از این اصل بیان می کند که برای هر دسته از مجموعه های ناتهی مجزا، حداقل یک مجموعه هست که دقیقاً شامل یک عضو از هرکدام از آنهاست. امیل بورل[۳۶] نشان داد که این اصول در حقیقند معادلند. این اصل بعدها توسط انجمن ریاضیدانان پذیرفته شد و می توان صورت کلی آنرا چنین بیان نمود:

اصل انتخاب[۳۷] (AC): هر خانواده از مجموعه های ناتهی دارای یک تابع انتخاب است.

$$\forall u \in X \exists A(x,y) \Rightarrow \big[\exists y \forall x \in A \exists u \in X(u \cap X = \phi)\big]$$

شاید صورت های معادلی چون «هر حاصلضرب دکارتی از مجموعه های ناتهی، خود ناتهی است» و اینکه«اگر $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانوادهٔ اندیس شده ای از مجموعه ها باشد آنگاه تابعی چون f هست که»

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha & , \\ f(\alpha) \in x_\alpha & \forall \alpha \in A. \end{cases}$$

معادل اصل انتخاب دیده شوند، ولی هستهٔ اصلی اصل انتخاب، وجود یک «مجموعهٔ انتخاب» و «تابع انتخاب» است.

سیستم اصول $(ZF۱ - ZF۸)$ که شامل اصل انتخاب است را با ZFC نشان می دهند و نظریهٔ مجموعه‌های تحت ZF منهای AC را نظریه مجموعه‌های خالص[۳۸] گویند. این از آنجهت است که هرچند این اصل مقبول همگان واقع نشد ولی طی سدهٔ گذشته، بجز منطق دانان و چند آنالیزدان حقیقی، ریاضیدانان درباره استفاده از آن ابائی نداشتند. شاید از نکات منفی آن نتایجی مانند پارادوکس باناخ—تارسکی[۳۹] است که بیان می کند «هرگوی واحد را می توان به دو مجموعهٔ مجزا چنان تقسیم (تجزیه) نمود که هر کدام یک گوی واحد بسازند» و از دید فیزیکی این عملاً امری محال است. حتی در بین نویسندگان نیز برخی اصل انتخاب را جزء اصول ZF می شمارند ولی بهرصورت نکات مشکوک این اصل همچنان مبهم باقی مانده است.

۸– گودل و کوهن:

در ۱۹۴۰ گودل[۴۰] ثابت کرد که اصل انتخاب با هیچیک از اصول ZF تعارضی نداشته و با آنها سازگار است پس می توان آن را به ZF اضافه نمود. در اینجا توسیعی از ZF حاصل می شود که

[۳۴] *Beppo Levi*
[۳۵] *Zermelo Axiom of Choice*
[۳۶] *Emile Borel*
[۳۷] *Axiom of Choice*
[۳۸] *Naive Set Theory*
[۳۹] *Banach – Tarski Paradox*
[۴۰] *Kurt Gödel*

همچنان پایدار باقی می ماند. طی سال های بعد تلاش برای اثبات فرض پیوستار تحت ZFC ادامه یافت، حتی، جستجو برای اضافه کردن فرض یا فرضهایی به ZF ادامه داشت تا با اینکار فرض پیوستار ثابت یا رد شود اما موفقیتی حاصل نگردید. این مساله را می توان ناشی از نقص اصول موضوعه دانست و وجود مسائل حل نشده ای مانند فرض پیوستار CH و پارادوکس باناخ—تارسکی نشان می دهد که تلاش جهت یافتن اصولی که بتواند چارچوب واحدی را برای تمامی ریاضیات تعریف نماید منجر به شکست شده است. همچنین طبق قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل[۴۱]، سازگاری ZFC در چارچوب ZFC قابل اثبات نیست پس چون هیچ ناسازگاری در ZFC دیده نمی شود پس آن را سازگار فرض می کنیم. فرض پیوستار نیز از اصل ساختارپذیری گودل تبعیت می کند اما این اصل ظاهراً بنظر می رسد محدود یا اشتباه باشد چنانکه خود گودل معتقد بود. بالعکس فرض پیوستار اصل مارتین[۴۲] را نتیجه می دهد و فرض پیوستار تعمیم یافته[۴۳] تحت ZF، اصل انتخاب را نتیجه می دهد.

در ۱۹۶۳ کوهن[۴۴] ثابت نمود که اصل انتخاب مستقل از ZF است و بدین ترتیب جایزهٔ فیلدز[۴۵] را ازآن خود نمود. با این دو کار مسئلهٔ اول هیلبرت مستقل از اصول ZF ثابت شد و بعبارتی اصول ZF برای نقض فرض پیوستار کافی نیستند چنانکه نقض یا اثبات فرض پیوستار نیازمند اصول اضافی دیگری است چنانکه معارض ZF نبوده و از ZF نیز حاصل نشود.

۹– اصل تقارن فریلینگ[۴۶] (AX):

این اصل از اصول نظریه مجموعه ها توسط کریس فریلینگ[۴۷] در ۱۹۸۶ بیان شد و بر اساس درکی مستقیم از استیوارت دیویسون[۴۸] بود اما ریاضیات زمینه‌ای آن تا سرپینسکی[۴۹] به عقب برمی گردد.

اصل (AX): گیریم S مجموعهٔ توابعی باشد که بازهٔ $[0,1]$ را به زیرمجموعه‌های شمارای $[0,1]$ بنگارد سپس برای هر $f \in S$، x و yی چنان هست که $x \notin f(y)$ و $y \notin f(x)$.

قضیه‌ای از سرپینسکی می گوید که تحت فرضهای ZFC اثبات AX معادل با نقض CH است یعنی فرض پیوستار. قضیه سرپینسکی در واقع به پرسشی از هوگواشتین هاوس[۵۰] جواب می دهد که مدتها قبل از اثبات استقلال فرضها توسط گودل و کوهن ثابت شده بود. گیریم S مجموعهٔ تعریف شده در AX باشد سپس:

قضیه. تحت ZFC، AX درست است اگر و تنها اگر فرض پیوستار نادرست باشد.

---

[۴۱] کورت گودل دو قضیه ثابت نمود: قضیهٔ اول اینکه در نظریهٔ مجموعه ها قضیه هایی صادق ی وجود دارند که نه می توان آنها را اثبات کرد و نه رد. دوم اینکه: اگر نظریهٔ مجموعه ها سازگار هم باشد، هیچ فرآیند تصمیمی وجود ندارد که سازگاری آن را ثابت کند.

[۴۲] $Martin\ Axiom$

[۴۳] می گوید برای هر عدد اصلی نامتناهی κ، عدد اصلی متعاقب و بعدی آن دقیقاً 2^{κ} است.

[۴۴] $Paul\ Cohen$

[۴۵] $Fields\ Medal$

[۴۶] $Frieling's\ Axiom\ of\ Symmetry$

[۴۷] $Chris\ Freiling$

[۴۸] $Stuart\ Davidson$

[۴۹] $Waclaw\ Sierpiński$

[۵۰] $Hugo\ Steinhaus$

(اثبات.) فرض کنید فرض پیوستار درست باشد. ثابت می کنیم اصل فریلینگ نادرست است. گیریم $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ و $|(0,1)| = \aleph$ پس مجموعهٔ

$$(0,1) = \{r_\alpha | \alpha < \aleph\}$$

خوش ترتیب با عدد اصلی $\aleph$ است. با فرض $f(r_\alpha) = \{r_\beta | \beta \leq \alpha\} \subset (0,1)$ سپس $f(r_\alpha)$ برای هر α شماراست و نیز $f \in S$ است. از اینکه برای هر $\alpha \leq \beta$ داریم $r_\beta \in f(r_\alpha)$ و یا $\alpha < \beta$ که $r_\alpha \in f(r_\beta)$ است که این نقض AX است.

برعکس اگر CH درست نباشد و $c > \aleph_1 > \aleph_0$ گیریم $X \subset (0,1)$ که $|X| = \aleph_1$. اگر $f \in S$ سپس $|\bigcup f(X)| \leq \aleph_1 < c$ و نیز $|(0,1) - \bigcup f(X)| = c$ گیریم $Y \subset (0,1) - \bigcup f(X)$ چنانکه $|Y| = \aleph_0$ باشد پس $|\bigcup f(Y)| = \aleph_0$ در نتیجه $|X - \bigcup f(Y)| = \aleph_1$ گیریم $Z = X - \bigcup f(Y)$ که $\bigcup f(Z)$ در $\bigcup f(X)$ واقع می شود. اما $Y \cap \bigcup f(Z)$ تهی است پس Y و Z مجموعه هائی ناتهی‌اند چنانکه $Y \cap \bigcup f(Z)$ و $Z \cap \bigcup f(Y)$ تهی اند و این AX را تایید می کند[۵۱].

کریستوفر فریلینگ که مقاله‌اش در جلد ۵۱ مجله نمادی چاپ شد، بحثی را روی خط حقیقی مطرح می کند که چنین است:

یک $f \in S$ در نظر گرفته و آزمایشی را چنین ترتیب می دهیم که دو دارت از بازهٔ یکه پرتاب می کنیم. x را ثابت فرض کرده، اولین دارت x را پرتاب می کنیم و $f(x)$ مجموعهٔ متناظر x روی $(0,1)$ است که شماراست. بعد از اینکه x پرتاب شد این نکته که دارت اول کجاست مهم نبوده و بعد دارت y را پرتاب می کنیم که در $f(x)$ خواهد افتاد. از آنجا که x ثابت است، مجموعهٔ $f(x)$ مجموعهٔ شمارای معینی بوده و اندازهٔ لبگ آن صفر است. پس با xی ثابت، احتمال این رویداد که x در $f(y)$ بیافتد صفر است. انتخاب y نیز اختیاری است و احتمال اینکه y در $f(x)$ بیافتد هم صفر خواهد بود یعنی با احتمال یک داریم $y \notin f(x)$ پس چون برای هر x ثابت این درست است احتمال انتخاب $x \notin f(y)$ یک است. طبق تقارن، که ترتیب انتخاب x و y تفاوتی ندارد می توان x و yی یافت که $x \notin f(y)$ و $y \notin f(x)$.

ما قادر نیستیم که عملاً با تعداد برآوردهای نامتناهی، مقادیر واقعی x و y را بیابیم پس این سوال که y در $f(x)$ می افتد یا خیر عملاً قابل محاسبه نیست و از طرفی با برآوردهای تصادفی نامتناهی نیز تعیین اینکه f واقعاً یک تابع باشد نیز امری دشوار است.

تحلیلی که فریلینگ ارائه می دهد اینست که با تعیین بصری y در $f(x)$ نمی افتد و قبل از اینکه دارت اول پرتاب شود قادریم که این امر را پیش بینی نمائیم زیرا $(0,1)$ ناشماراست. لازم به ذکر است که ما هنوز با رویدادی اندازه پذیر سروکار داریم که ترجیحاً شهودی است و در طبیعت قابل پیش بینی است. از آنجا که پیش بینی می کنیم y در $f(x)$ نباشد و با تقارن ترتیب پرتاب شدن دارت ها (که نام تقارن از آن گرفته شده) قادریم این را شهوداً پیش بینی کنیم که x نیز در $f(y)$ نخواهد افتاد. از طرفی این آزمایش هر زمانی که اجرا شود همان نتایج مشابه را بدنبال خواهد داشت.

فریلینگ بیان می کند که شهود احتمالی قویاً از این اثبات پشتیبانی می کند و اینکه خط حقیقی قادر نیست که تشخیص دهد کدام دارت ابتدائاً پرتاب شده است و این تقارنی را تداعی می کند که

---

[۵۱] نقض AX چنین است: با فرض $N = \{(x,y) | x \in f(y) \vee y \in f(x)\}$ سپس اگر CH درست باشد $f \in S$ی هست که $N = (0,1)$ است. اگرچه N لزوماً اندازه پذیر نیست ولی برای fی شاید بتوان اندازهٔ خارجی آن را کمتر از یک یافت.

محور اثبات وی بشمار می رود. اثبات شهودی فریلینگ با رویدادهای اندازه پذیر، دارای مخالفت های بسیاری در مجامع ریاضی است و این بحث، بطور همگانی پذیرفته نمی شود زیرا

احتمال شهودی بکار رفته در اثبات فریلینگ مبتنی بر وجود و فرض خوش تعریفی احتمال روی هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی است. اما فرمولسازی ریاضی از تعریف «احتمال» بر اساس مفهوم «اندازه» است که هنوز اصل انتخاب برای وجود زیرمجموعه های اندازه ناپذیر حتی در بازهٔ یکه نیز بکار می رود چنانچه مواردی مانند پاردوکس باناخ—تارسکی و وجود مجموعه های ویتالی[۵۲] این امر را ثابت می کنند.

در اینحالت عدد اختیاری در پرتاب دارت را می توان چنان انتخاب کرد که از یک مجموعه باندازه صفر لبگ نبوده و رویداد اختیار x در یک مجموعه اندازه ناپذیر انجام گیرد که این خود کلمه اختیاری و تصادفی بودن را با بحث مواجه خواهد نمود.

یک اختلاف جزئی در این بحث، پارادوکسی را با اصل انتخاب ایجاد می کند و آن اینستکه اگر جمعپذیری شمارای احتمال را با جمعپذیری روی کاردینال های کمتر از پیوستار جایگزین کنیم، آیا بایستی فرض پیوستار را بپذیریم یا نه!. (فریلینگ از بحثی مشابه برای اثبات نادرستی اصل مارتین استفاده می کند). بدین ترتیب بنظر می رسد که اصل فریلینگ بیشتر برخلاف خوش تعریفی احتمال روی اعداد حقیقی باشد تا برخلاف فرض پیوستار.

شاید بتوان برای توجیه برخی از مسائل در اثبات فرلینگ، مواردی را ذکر نمود مثلاً مجموعهٔ لبگ با اندازهٔ صفر را با مجموعهٔ شمارا عوض کرد، لیکن پوشیده نیست که مسائلی دیگر توجیه پذیر نیست مانند اینکه تحت ZFC نقض اصل فریلینگ معادل با وجود نوعی خاص از تابع انتخاب خواهد بود. حتی بعضی وجود تقارن در اثبات فریلینگ را نوعی پارادوکس تلقی نموده و برخی نیز این تقارن را نقض خوش ترتیبی و سپس پیوستار می دانند.

۱۰ — پیوستار و گرافها:

در انتها به ارتباط AX با نظریهٔ گراف اشاره داریم. تحت ZFC، نقض اصل تقارن و پذیرش اصل پیوستار معادل با اصول ترکیباتی زیر در گرافهاست:

برای هر عدد ترتیبی k، گراف کامل $\mathbb{P}(k)$ می تواند چنان جهتدار شود که هر گره آن به حداکثر k گره مرتبط شود.

در حالت $k = \aleph_0$ این چنین می شود که:

گراف کامل روی دایرهٔ یکه را می توان چنان جهتدار نمود که هر گره به حداکثر تعداد شمارائی گره متصل گردد.

[۵۲] $Vitali\ Sets$

منابع:

[۱] Abian, A. *On the Independence of Set Theoretical Axioms.* Amer. Math. Monthly 76, 787-790, 1969.

[۲] Abram W. C. *A New Perspective on the Continuum Hypothesis: Why Freiling's Axiom of Symmetry is Irrelevant.* math.uchicago.edu, 2007.

[۳] Boyer, C. B. and Merzbacher, U. C. *A History of Mathematics, 2nd ed.* New York: Wiley, 1991.

[۴] Enderton, H. B. *Elements of Set Theory.* New York: Academic Press, 1977.

[۵] Freiling, Chris. *Axioms of Symmetry: Throwing Darts at the Real Number Line.* The Journal of Symbolic Logic 51 (1): 190-200, 1986.

[٦] Jech, T. *Set Theory, 2nd ed.* New York: Springer-Verlag, 1997.

[۷] Kunen, K. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Dordrecht, Netherlands: Elsevier, 1980.

[۸] Levy, Azriel. *Basic Set Theory.* Springer-Verlag, London, 1979.

[۹] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*, 4th ed. London: Chapman & Hall, 1997.

[۱۰] Sierpinsky, Waclaw. *Cardinal and Ordinal Numbers.* Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1965.

also:

Articles by J.J. O'Connor and E.F. Robertson, in The *MacTutor* History of Mathematics archive, Mathematics, University of St. Andrews.